



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10246>

#### **To cite this version :**

Stéphane CHAMPMARTIN, Abdelhak AMBARI, Jean-Yves LE POMMELLEC - Force et ascension capillaires sur une bille Partie 2 : Détermination de l'angle de contact statique - In: 12ème Congrès de Mécanique du Maroc, Maroc, 2015-04 - Congrès de Mécanique du Maroc - 2015

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# FORCE ET ASCENSION CAPILLAIRES SUR UNE BILLE PARTIE 2 : DETERMINATION DE L'ANGLE DE CONTACT STATIQUE

CHAMPMARTIN S., AMBARI A., LE POMMELEC J.-Y.

LAMPA, Arts et Métiers-ParisTech, 2 bd du Ronceray,  
49035 Angers, France

## Introduction

Les interactions entre un solide et un liquide sont courantes dans les phénomènes naturels et les procédés technologiques : enduction, lubrification, condensation, traitements de surface... [1]. Caractériser ces interactions nécessite la connaissance de l'angle de contact  $\theta$  statique est défini comme l'angle entre la tangente à l'interface liquide-gaz et celle à la surface solide au niveau de la ligne triple. Les surfaces de faible énergie comme les polymères sont généralement non mouillantes et un liquide s'y disperse en gouttelettes avec un angle  $\theta$  élevé ( $\theta > 90^\circ$ ). A l'inverse, les surfaces de grande énergie comme les métaux sont généralement mouillantes et un liquide s'y étale avec un angle de contact faible ( $\theta < 90^\circ$ ). L'expérience montre que  $\theta$  présente une hystérésis  $\theta_r \leq \theta \leq \theta_a$  avec une amplitude d'au moins  $\Delta\theta = 10^\circ$  attribuable aux imperfections de la surface solide [1]. La technique la plus courante pour obtenir  $\theta$  est sa mesure directe à l'aide d'un goniomètre en formant sur une surface plane une petite goutte de liquide. D'autres techniques indirectes sont basées sur la remontée capillaire le long de surfaces solides planes ou courbes [2]. Nous proposons dans ce travail une technique permettant de déterminer  $\theta$  à partir des propriétés du ménisque se formant sur une bille. L'originalité de la méthode réside dans le fait que la connaissance de la tension de surface  $\sigma$  n'est plus obligatoire contrairement aux méthodes basées sur la remontée capillaire. Quant aux méthodes de mesure directe de  $\theta$ , celles-ci présentent également la difficulté de la détermination graphique de la tangente du profil du ménisque au niveau de la ligne triple ce qui n'est pas nécessaire ici.

## Analyse théorique

Soit à calculer le profil d'un ménisque se formant sur une bille en contact avec un liquide mouillant de masse volumique  $\rho$  et de tension de surface  $\sigma$ . Ce ménisque est caractérisé entre autres par sa hauteur d'ascension  $z_0$  au-dessus du niveau de liquide dans le réservoir. Ce profil est axisymétrique, s'étend à l'infini et mouille une surface solide sphérique de rayon  $b$  (Fig.1). Sa forme est obtenue par la résolution de l'équation de Young-Laplace :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{z}{a^2} \quad (1)$$

avec  $r_1$  et  $r_2$  les rayons de courbures principaux de l'interface et  $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$  la longueur capillaire.  $z$  est l'altitude d'un point quelconque situé sur le ménisque par rapport au point le plus bas de la sphère.

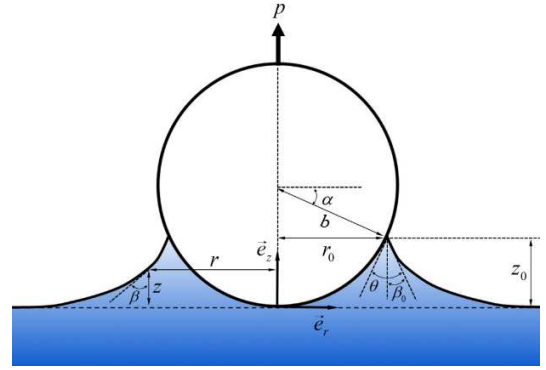


Fig.1 : schéma et définition des paramètres du problème

Pour la géométrie étudiée ici, l'équation (1) n'a pas de solution analytique et doit être résolue numériquement. Ferguson [3] a donné une solution approchée de (1) pour un ménisque se formant au contact d'une surface cylindrique. En notant que dans notre problème, la forme du ménisque ne dépend pas du volume de liquide pour  $r < r_0$ , le profil du ménisque est donc le même que s'il se formait sur un cylindre de rayon égal à celui de la ligne triple  $r_0$  mais avec un angle de contact effectif égal à  $\beta_0$  (cet angle est celui que fait la tangente au ménisque au niveau de la ligne triple avec la verticale). L'équation donnant  $z_0$  s'écrit alors comme :

$$\sin \beta_0 = 1 - \frac{z_0^2}{2a^2} + \frac{4a}{3r_0} \left[ \left( 1 - \frac{z_0^2}{4a^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (2)$$

avec :

$$\beta_0 = \theta - \alpha \quad (3)$$

et l'angle  $\alpha$  tel que :

$$\tan \alpha = \frac{b - z_0}{r_0} \quad (4)$$

Le rayon de la ligne triple s'écrit :

$$r_0 = \sqrt{z_0(2b - z_0)} \quad (5)$$

La solution de l'équation (2) est très précise dès que  $b > 2a$  ce qui correspond à des nombres de Bond  $Bo > 4$  ( $Bo = \rho g b^2 / \sigma$  compare l'influence des forces de gravité et de capillarité). Pour des liquides classiques, cela correspond à des billes de rayon minimum de l'ordre de 5mm. Si l'on mesure  $z_0$ , on ne peut pas encore déterminer  $\theta$  à partir de l'équation (2) car la tension de surface  $\sigma$  (incluse dans  $a$ ) est inconnue. On peut toutefois se passer de la mesure ou de la

connaissance de  $\sigma$  en introduisant une seconde équation donnant la force verticale  $p$  qu'exerce le ménisque sur la bille. Cette force correspond au poids du liquide déplacé et se compose de la projection verticale de la force capillaire avec un angle de contact effectif  $\beta_0$  et du poids du volume de liquide situé dans le ménisque pour  $r < r_0$  :

$$p = 2\pi r_0 \sigma \cos \beta_0 + \rho g \pi z_0^2 \left(b - \frac{2z_0}{3}\right) \quad (6)$$

La longueur capillaire  $a$  peut être exprimée à partir de l'équation (6) sous la forme suivante :

$$a = \sqrt{\frac{p - \rho g \pi z_0^2 (b - 2z_0/3)}{2\pi \rho g r_0 \cos \beta_0}} \quad (7)$$

En remplaçant dans l'équation (2) la longueur capillaire  $a$  donnée par (7), on obtient une équation dont la résolution donne  $\beta_0$  :

$$\begin{aligned} \sin \beta_0 - 1 + \frac{\pi \rho g r_0 \cos \beta_0 z_0^2}{p - \rho g \pi z_0^2 \left(b - \frac{2z_0}{3}\right)} \\ = \frac{4}{3r_0} \sqrt{\frac{p - \rho g \pi z_0^2 \left(b - \frac{2z_0}{3}\right)}{2\pi \rho g r_0 \cos \beta_0}} \\ \times \left[ \left(1 - \frac{\pi \rho g r_0 \cos \beta_0 z_0^2}{2[p - \rho g \pi z_0^2 (b - 2z_0/3)]}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (8) \end{aligned}$$

Connaissant  $\beta_0$ , l'angle de contact  $\theta$  se déduit ensuite des équations (3) et (4). Pour les applications numériques basées sur les mesures expérimentales décrites ci-dessous, le logiciel Mathematica a été utilisé pour résoudre l'équation (8).

### Vérification expérimentale

La figure 2 ci-dessous présente le schéma du montage utilisé. Nous avons mesuré  $z_0$  et le poids du ménisque  $p$  pour trois liquides courants : l'eau du robinet, l'huile de ricin et le glycérol. Nous avons utilisé deux billes d'acier de rayon  $b = 10,15 \text{ mm}$  et  $b = 11,5 \text{ mm}$  normalement utilisées dans des roulements à billes. Le rayon de ces billes est tel que l'hypothèse de validité de la solution de Ferguson [3] est largement respectée (le rayon de ces billes est plus grand que la longueur capillaire).

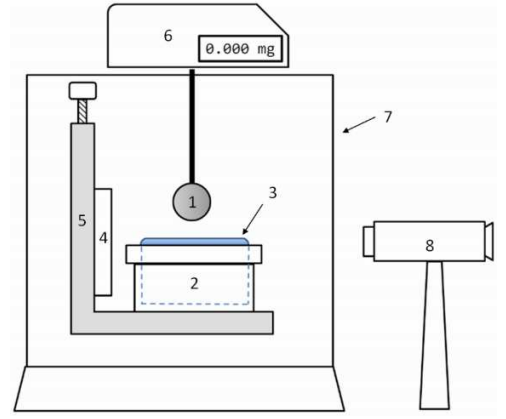


Fig.2: (1) sphère, (2) réservoir, (3) interface air/liquide, (4) rétroéclairage, (5) table micrométrique, (6) balance de précision, (7) enceinte vitrée, (8) appareil photo

Les billes sont fixées sur un axe rigide relié à une balance de précision permettant la mesure de la force  $p$ . Le protocole de mesure consiste à déplacer verticalement le réservoir grâce à un plateau mobile monté sur une table micrométrique jusqu'au contact de la bille avec le liquide. En fonction de la viscosité des liquides, le ménisque met un temps plus ou moins long à se former (de l'ordre de 10 ms pour l'eau et de l'ordre de 4 s pour le glycérol et l'huile de ricin qui sont de l'ordre de 1000 fois plus visqueux que l'eau). En raison de la taille finie du réservoir, le volume de liquide formant le ménisque occasionne une baisse du niveau dans celui-ci. On peut montrer que la force mesurée  $p_{mes}$  est légèrement surestimée par rapport à la force théorique (6) à cause du déplacement du plan de référence vers le bas. En effet, en utilisant la conservation du volume, on démontre que la correction de la force, tant que le rayon  $R_t$  du réservoir est grand devant la longueur capillaire, s'écrit :

$$p_{cor} = p_{mes} \left(1 - \frac{r_0^2}{R_t^2}\right) \quad (9)$$

Ici  $R_t = 6 \text{ cm}$  et on a  $0,936 < 1 - r_0^2/R_t^2 < 0,970$ . Les mesures des forces dans le tableau 1 ont été corrigées par (9). La hauteur  $z_0$  est obtenue par imagerie : le ménisque est photographié puis son rayon  $r_0$  est mesuré (traitement par le logiciel ImageJ). La valeur de  $z_0$  est déduite de l'équation (5). Le tableau 1 rassemble les valeurs des paramètres des expériences réalisées, les mesures effectuées et les résultats déduits pour l'angle de contact  $\theta$ . Aux erreurs de mesure près, on note que  $\theta$  est indépendant de la taille de la bille utilisée ce qui confirme la validité de notre méthode. On obtient pour l'eau du robinet  $\theta \cong 88,3^\circ$ , pour l'huile de ricin  $\theta \cong 25,5^\circ$  et pour le glycérol  $\theta \cong 87,7^\circ$ , en bon accord avec les valeurs trouvées dans la littérature pour ces liquides sur de l'acier. La figure 3 montre les ménisques pour l'eau et l'huile de ricin pour  $b = 11,5 \text{ mm}$  avec un accord qualitatif satisfaisant au vu des incertitudes sur la mesure graphique des angles.

	$b$	$z_0$	$p_{mes}/g$	$\theta$
	(mm)	(mm)	(mg)	(°)
<b>Eau</b> (T=23,1°C)	10,15	1,84	285	88,6
	11,50	1,99	347	87,9
<b>Huile de ricin</b> (T=24,0°C)	10,15	2,82	344	24,2
	11,50	2,90	409	26,8
<b>Glycérol</b> (T=22,3°C)	10,15	1,77	305	89,1
	11,50	1,96	385	86,2

Tab.1 : paramètres de travail et résultats des mesures expérimentales

En supposant que les principales sources d’incertitudes sont celles sur les mesures de  $p$  et de  $z_0$ , on peut estimer la sensibilité de la méthode :

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta z_0} \cong \frac{z_0}{a^2 \cos \beta_0} \quad (10)$$

En prenant  $\Delta z_0 = 10 \mu m$  et les valeurs de la longueur capillaire obtenues dans une précédente étude [4], on trouve  $\Delta \theta \approx 2^\circ$ .

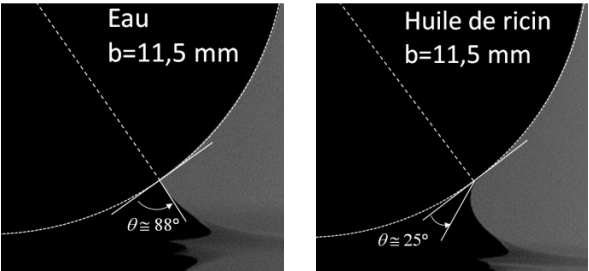


Fig.3 : angle de contact pour  $b = 11,5 \text{ mm}$  avec l’eau et l’huile de ricin

### Conclusion

Cette communication a démontré la faisabilité de la détermination de l’angle de contact  $\theta$  à partir des mesures de la hauteur d’ascension  $z_0$  et de la force verticale  $p$  engendrés par un ménisque se formant sur une bille. L’originalité de cette approche repose sur le fait que la connaissance de la tension de surface n’est pas obligatoire à l’inverse des autres techniques. Une solution approchée de l’équation de Young-Laplace est utilisée en adaptant à la géométrie sphérique les hypothèses utilisées par Ferguson dans le cas d’un ménisque se formant sur une fibre cylindrique. Les mesures expérimentales pour l’eau, l’huile de ricin et le glycérol ont donné des valeurs en bon accord avec celles que nous avons mesurées graphiquement ce qui valide cette approche originale. La seule contrainte à respecter est que le rayon de la bille soit supérieur à 2 longueurs capillaires.

### Bibliographie

[1] P.G. de Gennes, F. Brochard-Wiart and D. Quéré, Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves, Springer (2004)

[2] Y. Yuan and T.R. Lee, Contact angle and wetting properties in “Surface Science Techniques”, Springer Series in Surface Sciences, Vol. 51, 2013, 3-34

[3] A. Ferguson, On the shape of the capillary surface formed by the external contact of a liquid with a cylinder of large radius, Phil. Mag. 24 (Ser.6) 837-844, 1912

[4] S. Champmartin, A. Ambari and JY Le Pommelec, Force et ascension capillaires sur une bille. Partie 1 : détermination de la tension de surface, Congrès de Mécanique du Maroc, Casablanca, 2014